




Parametarske krive i površine

doc.dr. Samir Lemeš

Predavanja za predmet "Računari"
Arhitektonski fakultet u Sarajevu, 2012.

Parametarske krive i površine

- Kontinuiteti
- Parametarske krivulje
- Parametarske površine
- NURBS
- Primjeri



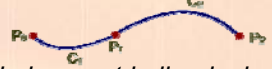


Kontinuiteti

- Zakrivljene linije i površine se ne mogu uvijek opisati linearnim, kružnim segmentima ili matematičkim funkcijama
- Krivulje se konstruišu povezivanjem krajeva više manjih segmenata, koji su najčešće opisani polinomima: $f(t)=at^3+bt^2+ct+d$
- Najčešće se koristi polinom 3. stepena
- Vrijednosti parametra "t" su u intervalu [0,1]
 - $t = 0$ – početak segmenta
 - $t = 1$ – kraj segmenta

Kontinuiteti

- **Kontinuitet** opisuje vezu, odnosno pravila o tome kako se vrši povezivanje, a može biti:
 - Parametarski kontinuitet
 - Geometrijski kontinuitet
- Parametarski kontinuitet je koncept koji opisuje promjenu vrijednosti parametra duž krivulje
- Parametarski kontinuitet se može uporediti s krivuljom koja opisuje kretanje objekta, i u tom slučaju vrijeme predstavlja parametar "t"
- Promjena se opisuje izvodima



Kontinuiteti

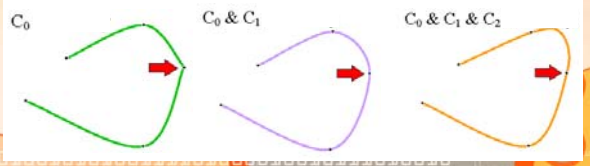
- Prvi izvod (derivacija) polinoma koji opisuje segment krivulje predstavlja tangentu na tu krivulju.

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d \quad \frac{dx}{dt} = 3at^2 + 2bt + c$$

- Analogija:
 - Brzina je prvi izvod pređenog puta
 - Ubrzanje je drugi izvod pređenog puta, odnosno prvi izvod brzine
- Kontinuitet predstavlja pokazatelj zakrivljenosti krivulje na prelazu segmenata

Kontinuiteti

- Parametarski kontinuitet može imati vrijednosti:
 - C^{-1} : krivulje imaju prekide (diskontinuitete)
 - C^0 : krivulje su spojene (imaju zajedničku tačku)
 - C^1 : prvi izvodi krivulja su jednaki
 - C^2 : prvi i drugi izvodi krivulja su jednaki
 - C^n : izvodi od prvog do n-tog su jednaki



Kontinuiteti

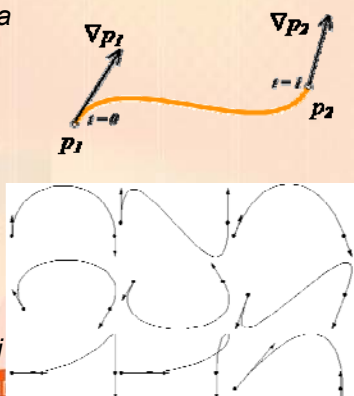
- Geometrijski kontinuitet se definiše:
 - G^0 kontinuitet predstavlja neprekidnost krivulje u tački dodira segmenata
 - G^1 kontinuitet podrazumijeva zajednički pravac vektora tangente u tački dodira segmenata.
 - G^2 kontinuitet podrazumijeva da segmenti imaju zajednički centar zakrivljenosti u tački dodira
- Smjer (ne obavezno i intenzitet) tangenti se poklapa, odnosno vrijednosti tangenti na krajevima dva segmenta su proporcionalne
- Parametarski kontinuitet implicira geometrijski, dok obrnuto ne mora da vrijedi

Kontinuiteti

- Da bi se osigurao C_2 kontinuitet, polinomi koji opisuju segmente moraju biti najmanje 3. reda.
- Vrste parametarskih krivulja 3. reda:
 - **Hermitove** - dvije krajnje tačke i dva vektora tangenti u krajevima
 - **Bezier** - dvije krajnje tačke i dvije druge tačke koje definišu vektore tangenti u krajevima
 - **Splajnovi** - četiri kontrolne tačke
 - C_1 i C_2 kontinuitet u tačkama dodira
 - Približavaju se svojim kontrolnim tačkama, ali ih ne moraju uvijek dodirnuti

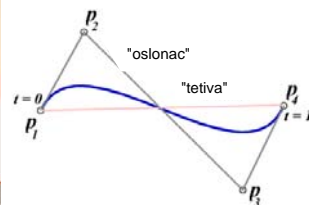
Parametarske krivulje

- Hermitova forma za definisanje krivulja trećeg reda: segment krivulje je definisan pomoću 2 krajnje tačke i 2 vektora tangenti na krajevima
- Postoji problem određivanja intenziteta tangenti



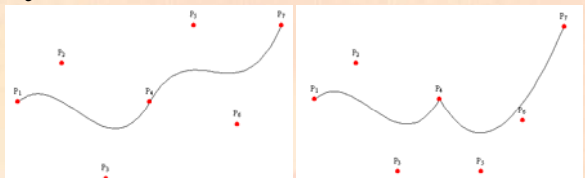
Parametarske krivulje

- Bézierova forma rješava problem određivanja intenziteta vektora tangenti tako što te vektore zamjenjuje početnim i krajnjim tačkama
- Četiri kontrolne tačke, od kojih su dvije čvorovi
- Kod Hermitovih i Bézierovih krivulja, pomjeranjem samo jedne kontrolne tačke utječe se na cijelu krivulju.



Parametarske krivulje

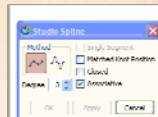
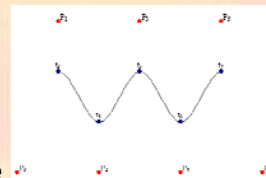
- Ako nema C_1 kontinuiteta, pomjeranjem tačke P_5 gubi se "glatki prelaz" između segmenata:



- Par parametarskih kubnih krivulja s C_2 kontinuitetom naziva se B-splajn (B-splajn)

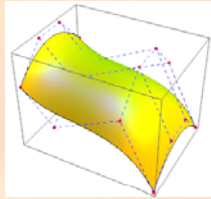
Parametarske krivulje

- Kod B-splajna, svaka kontrolna tačka utječe na 4 segmenta krivulje
- Uniformni B-splajn ima sve segmente iste dužine
- NeUniformni, Racionalni B-Splajnovi (NURBS) mogu imati segmente različitih dužina



Parametarske površine

- Bézier površine se formiraju od Bézier krivulja:
 - Rubne krivulje su Bézier krivulje s parametrima s i t
 - Svaka krivulja konstante s ili t je Bézier krivulja



0100101010011110100010010111010010

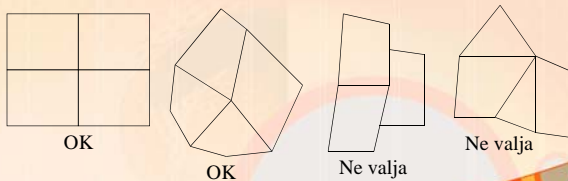
Parametarske površine

- U početku su se NURBS površine koristile u avio i automobilskoj industriji, ali se danas koriste i u drugim granama tehnike
- U CAD modelu se ne pohranjuju podaci o polinomima, nego koordinate kontrolnih tačaka
- NURBS površine su glatke (imaju kontinuitet višeg reda), i ne mogu modelirati površine samo sa C_0 kontinuitetom
- Obično se zakrivljene površine modeliraju mrežom NURBS površina

0100101010011110100010010111010010

Parametarske površine

- Mreža površina je skup površina koje su međusobno spojene po ivicama
 - Površine su spojene duž cijelih ivica
 - Svaka površina mora biti četverougla



0100101010011110100010010111010010

Prednosti NURBS površina

- Transformacije (rotacija, translacija, skaliranje) se vrše preko kontrolnih tačaka
- Koriste jednu matematičku formu i za analitičke (npr. konus) i za nepravilne površine
- Obezbeđuju fleksibilnost oblika
- Racionalnije koriste memoriju računara (zahtijevaju manje memorije od drugih metoda)
- Mogu se realizovati velikom brzinom pomoću numerički stabilnih i pouzdanih algoritama.

0100101010011110100010010111010010

Primjeri

