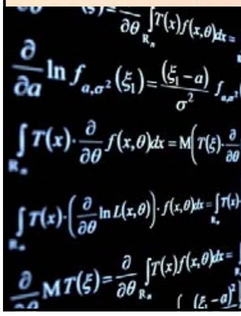
CAD transformacije

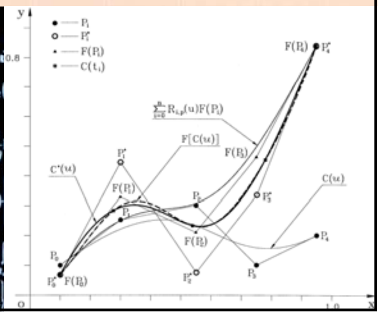
doc.dr. Samir Lemeš

Predavanja za predmet "Računari"
Arhitektonski fakultet u Sarajevu, 2012.

CAD transformacije

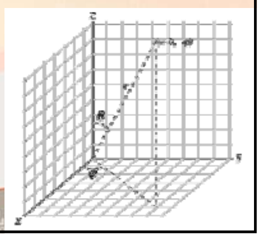
- *Matematičko objašnjenje transformacija*
- *Homogene koordinate*





Matematičko objašnjenje...

- *Računarska slika se sastoji od "primitiva" (osnovnih geometrijskih likova)*
- *Tačke se u memoriji računara pohranjuju pomoću koordinata (uređeni par brojeva u izabranom koordinatnom sistemu).*
- *2D tačka:*
  (x,y) ili (r,φ)
- *3D tačka:*
  (x,y,z) ili (r,φ,z) ili (R,φ,θ)



Matematičko objašnjenje...

- *2D pravac*
- *Eksplicitni oblik jednačine pravca:*
  $a \cdot x + b \cdot y = c$
- *Implicitni oblik jednačine pravca:*
  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$
- *Uvode se homogene koordinate, kako bi se omogućile matrične transformacije primitiva*
- *Implicitni oblik jednačine pravca u homogenim koordinatama:*
  $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$

Homogene koordinate

- *Prikaz tačke parom brojeva (x,y) se zamjenjuje prikazom sa tri tačke (x,y,h)*
- *Skalarni proizvod homogene koordinate daje istu tačku:*
  2·(2,3,5) = (4,6,10)
- *Bar jedna homogena koordinata mora biti različita od nule; (0,0,0) nije dozvoljena*
- *h=0 daje tačke "u beskonačnosti"*
  $A(x,y) \rightarrow A(x,y,h) \rightarrow A(x_1,x_2,x_3)$

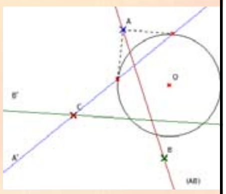
Matematičko objašnjenje...

- *Naizgled trivijalan problem određivanja položaja tačke u odnosu na pravac je potrebno opisati matematičkim modelom*
- *Matrični prikaz je lako realizovati u algoritmima računarskih programa.*
- *Matrični prikaz homogene jednačine pravca:*

$$X \cdot G = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Matematičko objašnjenje...

- *Problem određivanja položaja tačke u odnosu na pravac.*
- *Zadato:*
  - *Koordinate tačke: A(X_1,X_2,X_3)*
  - *Matrica koja opisuje pravac: P(a,b,c)*
  - *Dogovor:* $X \cdot G \begin{cases} >0, & \text{A je "iznad pravca"} \\ =0, & \text{A je na pravcu} \\ <0, & \text{A je "ispod pravca"} \end{cases}$



Matematičko objašnjenje...

- *Primjer:*
  - *Koordinate tačke: A(2,-3,1)*
  - *Matrica koja opisuje pravac: P(2,2,1)*
  - *Treba provjeriti da li je tačka A na pravcu P, iznad ili ispod pravca P*

$$A \cdot P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -1$$

  - *A·P<0 → tačka je ispod pravca*

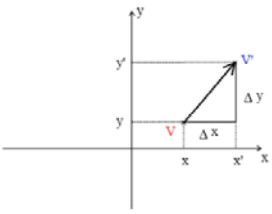
2D translacija

$$x' = x + \Delta x$$
$$y' = y + \Delta y$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$$

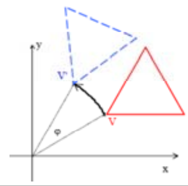
T- matrica translacija



2D rotacija

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

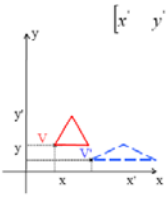


2D skaliranje

$$x' = x s_x$$
$$y' = y s_y$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Inverzne transformacije

- *Inverzna matrica translacije daje pomak u suprotnom smjeru*

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

- *Inverzna matrica rotacije daje rotaciju u suprotnom smjeru*

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Inverzna matrica skaliranja odgovara inverznoj transformaciji; povećanje odgovara smanjivanju*

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pitanja

1. *Koje su osnovne geometrijske transformacije?*
2. *Nacrtajte slovo U nakon rotacije zadate uglom od -90°*
3. *Koliki će biti prečnik kruga od 20 cm nakon skaliranja faktorom 0.25?*
4. *Za šta se koristi naredba TRIM?*
5. *Koja je prednost matričnog prikaza primitiva?*

- *Ne zaboravite napisati ime i prezime!*