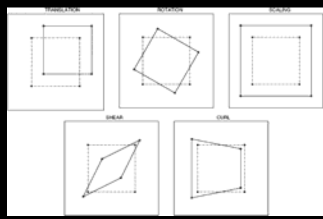
Računarska grafika

predavanja
v.prof.dr. Samir Lemeš
slemes@unze.ba

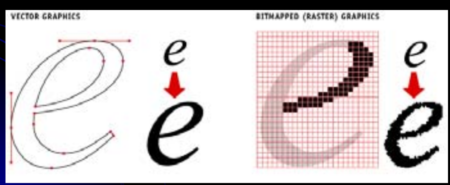
14. Geometrijske transformacije

- Vektorska grafika
- Homogene koordinate
- 2D Primitivi
- 2D translacija
- 2D rotacija
- 2D skaliranje
- Inverzne transformacije



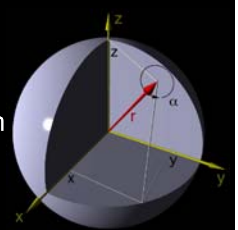
Vektorska grafika

- U rasterskoj grafici slika je predstavljena mrežom piksela.
- Nedostaci: zahtijeva puno memorije, povećanjem slike gubi se kvalitet.



Vektorska grafika

- Vektorska grafika sliku opisuje geometrijskim likovima: tačke, linije, krugovi, funkcije,...
- Položaj geometrijskih likova određuje se koordinatama u izabranom koordinatnom sistemu (2D: x,y ili r,θ; 3D: x,y,z ili r,θ,z).



Homogene koordinate

- Uobičajene transformacije u računarskoj grafici: translacija, rotacija, skaliranje, projekcije, se lakše izvode ako se koriste homogene koordinate, jer se onda te transformacije mogu implementirati u obliku operacija s matricama.
- Homogene koordinate je uveo Möbius 1827.
- Prednost je u tome što se sve tačke mogu prikazati konačnim brojevima (čak i ∞)

Homogene koordinate

- Prikaz tačke parom brojeva (x,y) se zamjenjuje prikazom sa tri tačke (x,y,h)
- Skalarni proizvod homogene koordinate daje istu tačku: (2,3,5) = (4,6,10)
- To znači da se ista tačka može predstaviti sa više različitih homogenih koordinata.
- Bar jedna homogena koordinata mora biti različita od nule; (0,0,0) nije dozvoljena
- h=0 daje tačke "u beskonačnosti"

2D Primitivi

- 2D tačka: $V(x,y) \rightarrow X = (x', y', h)\ ili\ X = (x_1, x_2, x_3)$

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

- 2D pravac:
  - implicitni oblik: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$
  - uvođenje homogene koordinate: $a \cdot \frac{x_1}{x_3} + b \cdot \frac{x_2}{x_3} + c = 0$
  - homogena jednačina: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$

2D Primitivi

- 2D pravac:
  - matrični zapis: $X \cdot G = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$
  - vektor normale: $n = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$
  - vektor tangente: $t = \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}$
  - dogovor: $X \cdot G \begin{cases} > 0, & X\ je\ "iznad"\ pravca \\ = 0, & X\ je\ na\ pravcu \\ < 0, & X\ je\ "ispod"\ pravca \end{cases}$

2D primitivi

- Dvije tačke određuju pravac (vektorski proizvod)

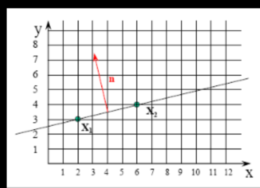
$$X_1 = (x_1\ y_1\ h_1)$$
$$X_2 = (x_2\ y_2\ h_2)$$

$$G = X_1 \times X_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & h_1 \\ x_2 & y_2 & h_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ -(a_1c_2 - a_2c_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}^T = X^T$$

Primjer

- X_1=(2 3 1), X_2=(6 4 1)



$$G = X_1 \times X_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G = \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3-4 \\ -(2-6) \\ 8-18 \end{bmatrix} \right)^T = \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$G = -x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -x + 4y - 10 = 0$$

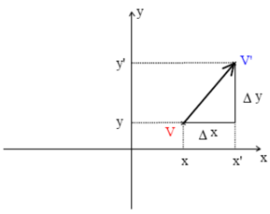
2D translacija

$$x' = x + \Delta x$$
$$y' = y + \Delta y$$

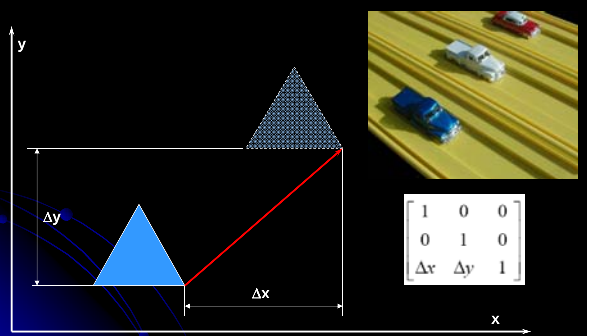
$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

V' = V · T

T- matrica translacija



2D translacija

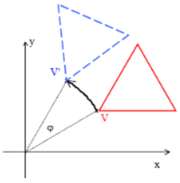


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

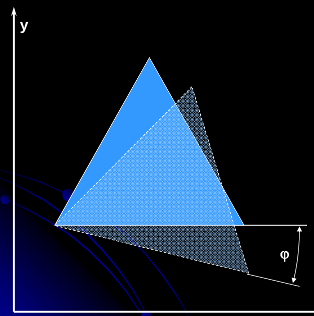
2D rotacija

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$[x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$



2D rotacija



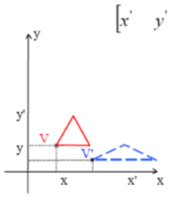
$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

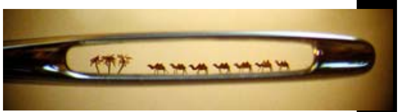
2D skaliranje

$$x' = x\,s_x$$
$$y' = y\,s_y$$

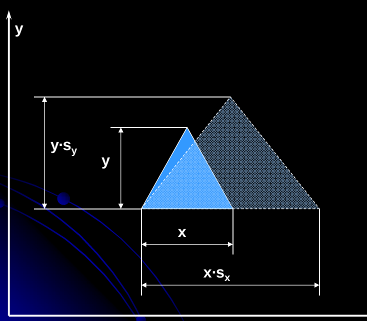
$$[x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$$

$$[x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





2D skaliranje



$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzne transformacije

- Inverzna matrica translacije daje pomak u suprotnom smjeru

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

- Inverzna matrica rotacije daje rotaciju u suprotnom smjeru

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzne transformacije

- Inverzna matrica skaliranja odgovara inverznoj transformaciji; povećanje odgovara smanjivanju

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$