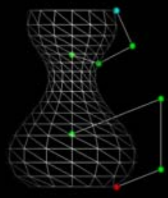
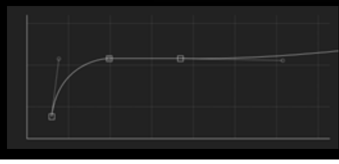
Računarska grafika

predavanja
v.prof.dr. Samir Lemeš
slemes@unze.ba

25. Parametarske krivulje

- Predstavljanje krivulja
- Parametarske krivulje
- Parametarske kubne krivulje
- Hermitovi kubni splajnovi
- Hermitove funkcije miješanja





Predstavljanje krivulja

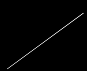
- Složeni geometrijski oblici u vektorskoj grafici se ne mogu uvijek opisati ravnim i kružnim (lučnim) segmentima.

Predstavljanje krivulja

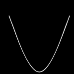
- Pomoću niza tačaka…
  - Krivulja je predstavljena približno, kao izlomljena linija – nije pogodno za glatke linije
  - Teško za manipulaciju jer se sve tačke moraju premještati pojedinačno
- Umjesto toga, krivulja se modelira kao polinom
  - x = x(t), y = y(t), z = z(t)
    - gdje su x(), y(), z() polinomi, a t je parametar

Polinomi

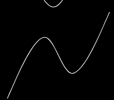
- Linearni: $f(t) = at + b$



- Kvadratni: $f(t) = at^2 + bt + c$

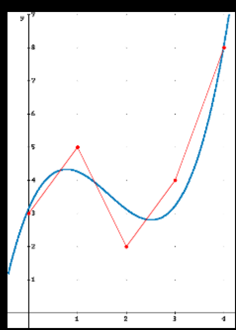


- Kubni: $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$



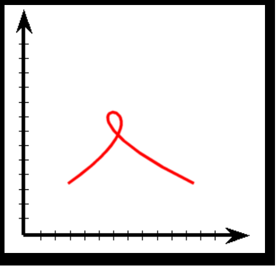
Predstavljanje krivulja

- Kontrolne tačke
  - Set tačaka koje imaju utjecaj na oblik krivulje
- Čvorovi
  - Kontrolne tačke koje leže na krivoj
- Splajnovi za interpolaciju
  - Krivulje koje prolaze kroz kontrolne tačke (čvorove)
- Aproksimativni splajnovi
  - Samo kontrolne tačke utječu na oblik



Parametarske krivulje

- Fleksibilno predstavljanje krivulje
- Ne moraju biti funkcije
  - Mogu imati više vrijednosti u odnosu na bilo koju dimenziju



Kubni polinomi

- $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$
- $y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$
- $z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$
- Neka je t: $(0 \le t \le 1)$
- Ako se uvede oznaka
  $T = [t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1]$
- Matrica koeficijenata C
- Krivulja: $Q(t) = T \cdot C$

$$[t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1] * \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Parametarske krive

- Kako odrediti tangentu na krivulju?
  - Ako je f(x) = $f(x) = x^2 - 4$
    - tangenta za (x=3) je $f'(x) = 2x - 4 = 2(3) - 4$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = \frac{d}{dt}T\dot{C} = [\,3t^2 \;\; 2t \;\; 1 \;\; 0\,]\dot{C}$$

- Izvod od Q(t) je vektor tangente u t:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = \frac{d}{dt}T \cdot C = [3t^2 2t 1 0] \cdot C$$

Izvodi

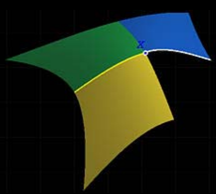
- Određivanje izvoda (tangenti) krivulje:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 3\mathbf{a}t^2 + 2\mathbf{b}t + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Segmenti krivulje

- Krivulje se konstruišu povezivanjem krajeva više manjih segmenata
  - Moraju postojati pravila o tome kako se vrši povezivanje
- Kontinuitet opisuje vezu
  - Parametarski kontinuitet
  - Geometrijski kontinuitet

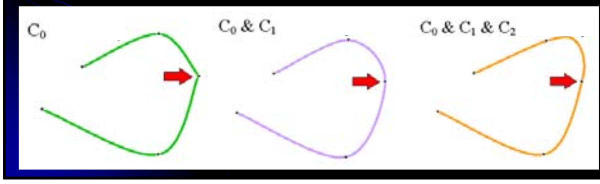


Parametarski kontinuitet

- Parametarski kontinuitet je koncept koji opisuje promjenu vrijednosti parametra duž krivulje
- Može se uporediti s krivuljom koja opisuje kretanje objekta, i u tom slučaju vrijeme predstavlja parametar "t"
- Promjena se opisuje izvodima
- Kontinuitet predstavlja pokazatelj zakrivljenosti krivulje na prelazu segmenata

Parametarski kontinuitet

- C^{-1}: krivulje imaju prekide (diskontinuitete)
- C^0: krivulje su spojene (imaju zajedničku tačku)
- C^1: prvi izvodi krivulja su jednaki
- C^2: prvi i drugi izvodi krivulja su jednaki
- C^n: izvodi od prvog do n-tog su jednaki



Geometrjski kontinuitet

- Geometrijski kontinuitet:
  - G^0 kontinuitet predstavlja neprekidnost krivulje u tački dodira segmenata
  - G^1 kontinuitet podrazumijeva zajednički pravac vektora tangente u tački dodira segmenata.
  - G^2 kontinuitet podrazumijeva da segmenti imaju zajednički centar zakrivljenosti u tački dodira
- Smjer (ne obavezno i intenzitet) tangenti se poklapa, odnosno vrijednosti tangenti na krajevima dva segmenta su proporcionalne (G^2 kontinuitet znači simetrične tangente)

Parametarske kubne krivulje

- Da bi se osigurao C_2 kontinuitet, krivulje moraju biti najmanje trećeg reda
- Data je parametarska definicija kubnog splajna (3. reda) u dvije dimenzije
- Kako je proširiti na tri dimenzije?

$$x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

Parametarske kubne krivulje

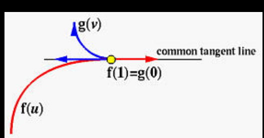
- Može se predstaviti i u matričnom obliku

$$x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$[x \quad y] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$

Koeficijenti

- Kako izabrati koeficijente?
  - $[a_x\ b_x\ c_x\ d_x]$ i $[a_y\ b_y\ c_y\ d_y]$ moraju zadovoljiti ograničenja koja nameću čvorovi i uslovi kontinuiteta



Parametarske krivulje

- Krivulju je teško konceptualizirati kao $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$

  (Crtači ne razmišljaju o koeficijentima ili kubnim jednačinama)

- Umjesto toga, krivulja se definiše kao kombinacija 4 precizno definisana kubna polinoma

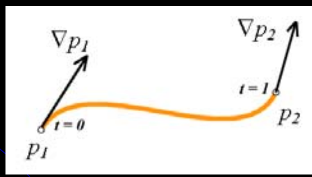
- Svaki tip krivulje definiše različite kubne polinome

Parametarske krivulje

- Hermitove - dvije krajnje tačke i dva vektora tangenti u krajevima
- Bezier - dvije krajnje tačke i dvije druge tačke koje definišu vektore tangenti u krajevima
- Splajnovi - četiri kontrolne tačke
  - C_1 i C_2 kontinuitet u tačkama dodira
  - Približavaju se svojim kontrolnim tačkama, ali ih ne moraju uvijek dodirnuti

Hermitovi kubni splajnovi

- Primjer čvorova i kontinuiteta



Hermitovi kubni splajnovi

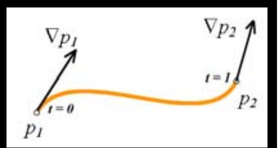
- Po jedna kubna krivulja za svaku dimenziju
- Krivulja u x/y ravni ima dvije krivulje:

$$f_x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$f_y(t) = et^3 + ft^2 + gt + h = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- 2-D Hermitov kubni splajn je definisan sa 8 parametara: a, b, c, d, e, f, g, h
- Kako se intuitivne krajnje tačke pretvaraju u ovih 8 (relativno) neintuitivnih parametara?
- Poznato je:
  - (x, y) položaj za t = 0, p_1
  - (x, y) položaj za t = 1, p_2
  - (x, y) izvod za t = 0, dp/dt
  - (x, y) izvod za t = 1, dp/dt



Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
  - (x, y) položaj za t = 0, p_1

$$f_x(0) = a0^3 + b0^2 + c0 + d = \begin{bmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$f_x(0) = d = p_{1_x}$$

$$f_y(0) = e0^3 + f0^2 + g0 + h = \begin{bmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

$$f_y(0) = h = p_{1_y}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
  - (x, y) položaj za t = 1, p_2

$$f_x(1) = a1^3 + b1^2 + c1 + d = \begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$f_x(1) = a + b + c + d = p_{2_x}$$

$$f_y(1) = e1^3 + f1^2 + g1 + h = \begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

$$f_y(1) = e + f + g + h = p_{2_y}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Za sad imamo 4 jednačine, ali 8 nepoznatih
- Koriste se izvodi:

$$f_x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$f_x'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$
$$f_x'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$f_y(t) = et^3 + ft^2 + gt + h$$
$$f_y'(t) = 3et^2 + 2ft + g$$
$$f_y'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
  - (x, y) izvod za t = 0, dp/dt

$$f_x'(0) \quad = 3a0^2 + 2b0 \quad + c$$
$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 0^2 & 2\cdot 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$
$$f_x'(0) = c = {dp_{1_x}}/{dt}$$

$$f_y'(0) \quad = 3e0^2 + 2f0 \quad + g$$
$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 0^2 & 2\cdot 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$
$$f_y'(0) = g = {dp_{1_y}}/{dt}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
  - (x, y) izvod za t = 1, dp/dt

$$f_x'(1) \quad = 3a1^2 + 2b1 \quad + c$$
$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1^2 & 2\cdot 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$
$$f_x'(1) = 3a + 2b + c = {dp_{1_x}}/{dt}$$

$$f_y'(1) \quad = 3e1^2 + 2f1 \quad + g$$
$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1^2 & 2\cdot 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$
$$f_y'(1) = 3e + 2f + g = {dp_{1_y}}/{dt}$$

Hermitova specifikacija

- Matrična jednačina za Hermitovu krivulju

$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ r\,p_1 \\ r\,p_2 \end{array} \begin{array}{c} t^3 \quad t^2 \quad t^1 \quad t^0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1_x} & p_{1_y} \\ p_{2_x} & p_{2_y} \\ {dp_{1_x}}/{dt} & {dp_{1_y}}/{dt} \\ {dp_{1_x}}/{dt} & {dp_{2_y}}/{dt} \end{bmatrix} \begin{array}{c} t=0 \\ t=1 \\ t=0 \\ t=1 \end{array}$$

Rješavanje Hermitove matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_{1_x} & p_{1_y} \\ p_{2_x} & p_{2_y} \\ {dp_{1_x}}/{dt} & {dp_{1_y}}/{dt} \\ {dp_{1_x}}/{dt} & {dp_{2_y}}/{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix}$$

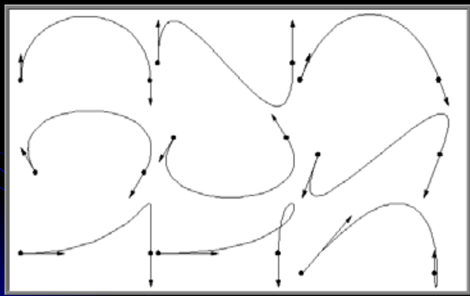
Matrice splajna i geometrije

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{1_x} & p_{1_y} \\ p_{2_x} & p_{2_y} \\ {dp_{1_x}}/{dt} & {dp_{1_y}}/{dt} \\ {dp_{1_x}}/{dt} & {dp_{2_y}}/{dt} \end{bmatrix}}_{G_{Hermite}} = \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix}$$

Rezultujuća jednačina Hermitovog splajna

$$[x \quad y] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Hermite}}$$

Primjeri Hermitovih krivulja



Funkcije miješanja (Blending Functions)

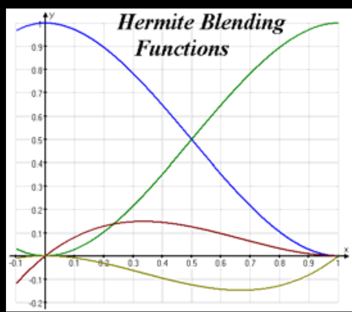
- Množenjem prve dvije matrice u donjoj lijevoj jednačini, dobiju se 4 funkcije od 't' koje miješaju 4 kontrolna parametra
- To su funkcije miješanja

$$[x \quad y] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Hermite}}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \end{bmatrix}$$

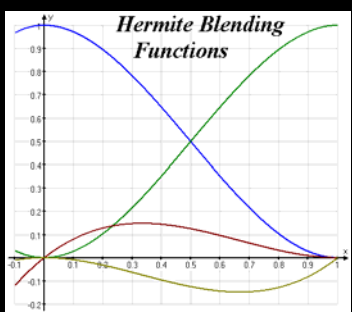
Hermitove funkcije miješanja

- Grafička zavisnost funkcije miješanja od parametra 't'



Hermitove funkcije miješanja

- Svaka funkcija miješanja reflektuje utjecaj P_1, P_2, ΔP_1, ΔP_2 na oblik splajna



Hermitove funkcije miješanja

- Funkcije miješanja se koriste za interpolaciju krivulja.
- Svaka interpolirana tačka je linearna kombinacija ove 4 funkcije miješanja.